(MC1) Interrogation 4 : Suites

Exercice 1 (Cours) ($\simeq$ 1 point)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

1) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété suivante : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

2) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété suivante : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exercice 2 ($\simeq$ 4 points)

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 1$ et la récurrence $z_{n+1} = (1+i)z_n$ converge vers 0.

2) Si u est une suite bornée, alors u converge.

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2 - n^3}{\ln(n)}$ converge vers 0.

4) Si u est une suite convergente, alors u est monotone.

Exercice 3 ($\simeq$ 5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

(MC1) Interrogation 4 : Suites
Correction

Exercice 1 (Cours)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

1) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété suivante : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant A$ ou de manière équivalente, $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant -A$

2) Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété suivante : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

Exercice 2
Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 1$ et la récurrence $z_{n+1} = (1+i)z_n$ converge vers 0.
Rappel : une suite géométrique de raison q converge ssi $|q| < 1$.
FAUX. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1+i$. Or $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} > 1$, donc la suite (z_n) diverge.

2) Si u est une suite bornée, alors u converge.
FAUX. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bornée ($|u_n| \leqslant 1$) mais u diverge.

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2 - n^3}{\ln(n)}$ converge vers 0.
Méthode : puisqu'il y a une forme indéterminée au numérateur, on factorise par le terme dominant n^3.
FAUX. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^3}{\ln(n)}\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)$.
D'une part, par croissances comparées, $\dfrac{n^3}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'autre part, $\left(\dfrac{1}{n} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
Donc par produit, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

4) Si u est une suite convergente, alors u est monotone.
FAUX. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Par encadrement, puisque $0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n}$, u converge vers 0. Mais u n'est pas monotone, car pour tout $k \geqslant 1$, $u_{2k} > 0$ et pour tout $k \geqslant 0, u_{2k+1} < 0$.

Exercice 3
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 2$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$.
Initialisation : $u_0 = 1 \leqslant 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, et montrons la au rang $n+1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \leqslant \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Par récurrence, on a donc $u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 1 - u_n = -\frac{u_n}{2} + 1 \geqslant -\frac{2}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Donc u est croissante.

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

D'après 1), u est majorée. D'après 2), u est croissante. Donc d'après le théorème de convergence monotone, u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $l = \frac{l}{2} + 1$, d'où $l = 2$.