(MC1) Interrogation 5 : Fonctions, limites et continuité

Exercice 1 (Cours) **(1 point)**

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. (0.5 point)
   Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

2) Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. (0.5 point)
   Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Exercice 2 **(6 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent, ou prouver qu'elles n'existent pas.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$ (1 point)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(x)$ (2 points)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - 2x\right)$ (1 point)

4) $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1+x)$ (2 points)

Exercice 3 **(2 points)**

Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sqrt{2-\ln(x)}$ (1 point)

2) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(4-x^2)}{x}$ (1 point)

Exercice 4 **(2 points)**

Les fonctions suivantes sont elles prolongeables par continuité en 0 ? Justifier.

1) $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ (1 point)

2) $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2 + x^2\ln(x)$ (1 point)

(MC1) Interrogation 5 : Fonctions, limites et continuité
Correction

Exercice 1 (Cours) **(1 point)**

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. (0.5 point)
Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

2) Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. (0.5 point)
Écrire avec des quantificateurs la propriété suivante : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap \mathcal{D}_f, |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 **(6 points)**

Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent, ou prouver qu'elles n'existent pas.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$ (1 point)

Pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cos(x)$ (2 points)

Méthode : pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on utilise la *caractérisation séquentielle* de la limite. Il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers x_0, mais telles que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas la même limite.

Idée : La fonction $x \mapsto \cos(x)$ oscille entre des valeurs positives et négatives, donc on devine que $x \mapsto x\cos(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to +\infty$. On va construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ mais dont les images par $x \mapsto x\cos(x)$ n'ont pas la même limite.

Montrons que $x \mapsto x\cos(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to +\infty$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n\cos(u_n) = 2n\pi\cos(2n\pi) = 2n\pi \times 1 = 2n\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$v_n\cos(v_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \times 0 = 0$$

Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc par caractérisation séquentielle de la limite, $x \mapsto x\cos(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 2x\right)$ (1 point)

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} - 2x\right) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=0}^{n} (1+x)$ (2 points)

$\sum\limits_{k=0}^{n} (1+x) = (n+1)(1+x) \xrightarrow[x \to 1]{} (n+1)(1+1) = 2(n+1)$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=0}^{n} (1+x) = 2(n+1)$

Exercice 3 **(2 points)**

Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln(x)}$ (1 point)

f est bien définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x > 0$ et $2 - \ln(x) \geqslant 0$.
Or $2 - \ln(x) \geqslant 0 \iff 2 \geqslant \ln(x) \iff e^2 \geqslant x$.
Donc finalement $\mathcal{D}_f = \left]0, e^2\right]$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(4 - x^2)}{x}$ (1 point)

g est bien définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x \neq 0$ et $4 - x^2 > 0$.
Or $4 - x^2 > 0 \iff 4 > x^2 \iff x \in]-2, 2[$
Donc finalement $\mathcal{D}_g =]-2, 0[\cup]0, 2[$.

Exercice 4 **(2 points)**

Les fonctions suivantes sont elles prolongeables par continuité en 0 ? Justifier.

Rappel : $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ si et seulement si f admet une limite **réelle** en x_0.

1) $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ (1 point)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ donc f n'admet pas de limite ***finie*** en 0.

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2) $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2 + x^2 \ln(x)$ (1 point)

Par croissances comparées, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 \ln(x)) = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2 + x^2 \ln(x)) = 2 + 0 = 2 \in \mathbb{R}$.

Donc g est prolongeable par continuité en 0.